

直感的な意味付けによる百分率と速さの問題のための学習システムの開発

Learning System for Percentage and Speed Questions by Intuitive Meaning Attachment

長田 佳倫^{*1}
Yoshinori Nagata

砂山 渡^{*1}
Wataru Sunayama

¹ 広島市立大学 情報科学部
Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University*

Abstract: Elementary, junior high or high school students are required to understand way of thinking against questions that involve calculation in the process of solution. Students who know formula only have to remember all formula to solve various questions and cannot have ability to apply one to similar questions. In this study, a learning system that assists establishing way of thinking against percentage and speed questions by intuitive understanding iterations is proposed. According to experimental results, the proposed system that emphasis on way of thinking was effective to learning and its radication rather than the comparative system that emphasis on solution by formula.

1 はじめに

小学校、中学校、高校の学生や生徒が、計算によって解答を導き出す科目や分野の問題解決過程には、問題の解決方法を説明する「考え方」、考え方に基づいて問題を解けるようにする「問題の定式化」、そして定式化により与えられる式に基づいて答えを求める「計算」とがある。このような問題解決においては、「考え方」を理解して「問題の定式化」を行うプロセス（本研究では問題の本質と呼ぶ）が重要となるが、実際には「問題が定式化」された後のいわゆる「公式」を活用して「計算」を行えば試験で得点が取れるため、学生のレベルに応じてはこの本質部分が省略されることも少なくない。

しかし本質部分を除いた学習では、すべての公式やパターンを暗記する必要があることに加え、類似する他の問題への応用を考えることができなくなる欠点が生じる。本質部分の学習では「問題を解く際の考え方を理解すること」が必要となるが、文部科学省の「教科書の改善・充実に関する研究報告書」[1]によると、多くの小学生は現在の算数の教科書に対し、簡単な問題から急に難しくなるのでわからなくなること、また絵や写真は少なくともいいがもっと詳しい図や解説がほしいという学生の感想が示されており、説明のわか

りやすさと、段階的かつ具体的な手順の説明の必要性がうかがえる。

そこで本研究では、百分率と速さの分野を対象として、公式の丸暗記とその適用を目指す学習ではなく、問題の考え方から定式化へと至るプロセスに焦点を当てた学習を支援する。すなわち、考え方の理解と記憶を促し、段階的かつ具体的な手順の説明を備え、学習した考え方を定着させられる学習システムを構築する。本稿で提案するシステムは、学習対象分野の問題の考え方を理解していない、あるいは十分に考え方が定着していない学習者を主な対象とする。

2 関連研究

2.1 問題解決過程を支援する研究

一般的な数学の問題解決過程においては、一つの知識によって即座に解答に至ることは少なく、いくつかの論理展開をつないで理解を進めて行く必要がある。そのため、生徒の内発的な問いをつなげて問題解決を進展させる研究[2]や、生徒のペアがお互いに対話しながら問題解決を図ることの意義に関する研究[3]がある。しかし本研究では、複数の過程を要する問題を解く前段階として、一つの知識により導かれる式を用いて解答することができなければ、より複雑な問題に対応することはできないと考えた。

* (連絡先) 砂山渡, 731-3194, 広島市安佐南区大塚東 3-4-1, 広島市立大学大学院情報科学研究科, sunayama@hiroshima-cu.ac.jp

また、問題解決過程においては図を描くことが有効と示されており、特に図を描くことが困難な生徒に、図を描くきっかけを与えることが有効と示されている [4]。そこで本研究では、「比較量、基準量、割合」の3つ組からなる分野を対象として、その3つの数量の関係のみの把握から解決できる問題を対象とした上で、直感的に理解しやすいグラフを用いて表すことで、既知の量と求める量の関係を明確にして問題解決を促す。

問題解決を支援する図やその効果に関する研究は古くから行われている。数学教育においては、問題の状況を説明して問題解決を促す図に「情景図」があり、特に線分を利用して表したものを線分図と呼ぶ。これまでの研究においては、このような図の役割について調査した研究 [5, 6] や「速さ」や「割合」などの特定の単元を対象として、その分野の問題を幅広く解決することを支援するものが多かった [7, 8]。しかし、理解力が十分でない生徒に対して、その場しのぎとならない根本的な問題解決能力を与えるためには、複数の図を用いたり、多様な問題を対象とする前に、単純かつ複数の分野に適用可能な考え方を教える必要がある。

そこで本研究では、「比較量、基準量、割合」の3つ組からなる分野に対して、線分図に相当するグラフを用いて、問題解決に必要な公式の考え方に着目し、特定の分野によらない問題解決支援を目指す。特に、提示するグラフを問題解決に向けた説明のためだけに用いるのではなく、学習者が問題を解く場面において、頭の中でグラフを再現して考えられるようにすることを目指す。

2.2 繰り返し練習により学習内容の定着を支援する研究

近年、PC やタブレット端末を利用した学習支援が広く行われるようになってきている。特に知識の定着を目的とした場合、計算ドリルや漢字ドリルなど類似問題を反復して解く学習が一般に行われており、コンピュータを活用したドリル型の学習支援について、その効果が確認されている [9]。コンピュータを活用した学習の利点にはいくつか考えられるが、単純な知識の定着という観点においては、短時間に繰り返し可能な練習問題を自動的に生成することで、集中的に反復が可能になる点が挙げられる。しかし、考え方の学習を目指したシステムでは、時間をかけた学習により知識の定着を目指すことが多く、学習意欲の維持が困難になり途中で投げ出してしまふなど、別の問題が生じる可能性があった。

そこで本研究では、公式への当てはめなど、機械的な作業の反復により「知識」を覚えさせる学習システムではなく、問題を解く過程を重視して、頭の中で考

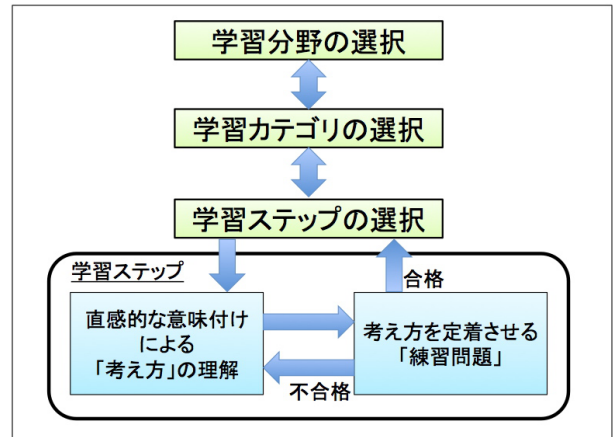


図 1: 直感的な意味付けによる学習システムを用いた学習の流れ

えることを短時間に繰り返す練習により、問題を解く際の「考え方」を身につけられる学習システムの構築を目指す。特に、紙や鉛筆を用いずに頭の中で考えさせること、また短時間で多くの問題をこなせるようにすることを重視して、暗算が可能な計算で解ける問題を用意し、考え方の理解と定着に特化したシステムを構築する。

3 直感的な意味付けによる学習システム

本章では、直感的な意味付けにより、問題の考え方の理解を促し、理解した考え方を繰り返しの練習により定着させる学習システムについて述べる。

3.1 直感的な意味付けによる学習システムの構成

図1に、学習システムを用いた学習の流れを示す。提案システムを用いる学習者は、学習分野、学習カテゴリ、学習ステップを選択した後に、指定したステップでの理解目標となる問題について、考え方を理解した後、考え方を定着させる練習問題を解く。

3.2 学習分野

本システムでは、「比較量、基準量、割合」の3つ組からなる学習分野を対象とする。本研究では、特に「百分率」と「速さ」の分野を対象とした。百分率の分野は「比べる量、もとにする量、百分率」の3つ組、速さの分野は「道のり、速さ、時間」の3つ組から構成される。

表 1: 学習カテゴリ「比べる量」「もとにする量」「百分率」の学習ステップ、考え方で用意したページ数ならびに練習問題の種類数(ただし「もとにする量」ではステップ 4) を省略した 4 ステップ構成)

学習ステップと出題に用いる百分率	考え方	問題種類数
1) 100%	1 ページ	27
2) 50, 25, 10, 1%	4 ページ	108
3) 25, 10, 1%の複数倍	3 ページ	432
4) 100% + ステップ 2), 3)	3 ページ	540
5) 100% - ステップ 2), 3)	3 ページ	540

表 2: 学習カテゴリ「道のり」「速さ」「時間」の学習ステップ、考え方で用意したページ数ならびに練習問題の種類数

学習ステップと出題に用いる時間	考え方	問題種類数
1) 1 時間	1 ページ	27
2) 30, 20, 15, 10, 1 分	5 ページ	135
3) 1 時間, 20, 15, 10, 1 分の複数倍	5 ページ	513

3.3 学習カテゴリ

「比較量, 基準量, 割合」の 3 つ組からなる学習分野において, その 1 つ 1 つの構成要素を学習カテゴリと呼ぶ. 本研究で対象とする学習分野「百分率」では, 「比べる量」「もとにする量」「百分率」, 学習分野「速さ」では「道のり」「速さ」「時間」が学習カテゴリとなる.

3.4 学習ステップ

学習カテゴリで学習する内容に対して, 段階的な学習を可能にする細分化を行ったものを学習ステップと呼ぶ. 学習分野「百分率」ならびに学習分野「速さ」の学習カテゴリで用意した学習ステップを, それぞれ表 1 と表 2 の左部分に示す. 両カテゴリのステップ 1) からステップ 3) の 3 つのカテゴリにおいては, 扱う割合を, 基準量と同一の値, 基準量の $1/n$ (n は整数) で表される単純な値, 基準量の $1/n$ で表される単純な値の複数倍, を扱った問題として構成した. これらに加えて, 学習分野「百分率」では分野特有の出題傾向に応じて, 基準量からの増減に関するステップを設けた.

本システムで対象とする問題は, 暗算が可能な問題に限ってステップを構成している. これは本研究が, 紙を使って計算することなく, 頭の中だけで考えて解答を導き出す, 考え方の理解に特化した学習を目指していることによる.

各学習ステップは, 直感的な意味付けにより考え方の理解を行うための「考え方」部分と「考え方」を定着させるための「練習問題」から構成される. 表 1 と表 2 の右部分に, 各ステップで用意した「考え方」を説明するページの数と, 練習問題で出題される問題種

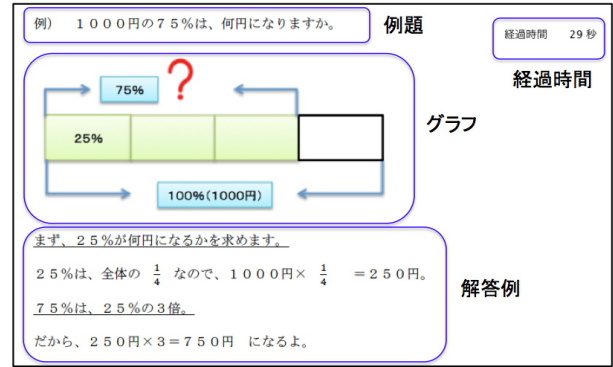


図 2: 「考え方」のシステム画面(「比べる量」ステップ 3) の例

類数を示す. 学習者は, この「考え方」のページを閲覧することで, 各ステップの問題を解く方法について学ぶ. その上で, 学んだ考え方を実際の問題を解きながら定着させるための「練習問題」に進む.

3.4.1 直感的な意味付けによる考え方の理解

「考え方」を理解するページの構成を図 2 に示す. 考え方を理解するページは, 例題, グラフ, 解答例, ページの閲覧開始からの経過時間の 4 つで構成する. 各学習ステップにおいては, 例題の数値を変更した別の例題の解き方を説明したページを複数用意する.

例題は, 各ステップで出題対象となる数値を用いたものとして, 最も簡潔な表現で必要な値を求めさせる問題とする. これは, 問題理解過程ではなく問題解決過程を支援するために, もっともシンプルに理解できる問題表現を意図したことによる.

グラフは, 例題を解く際に, 頭の中に描かれるべきイメージを表す図として用意する. すなわち, 問題の解き方を解説するためだけの図ではなく, 後に同様の問題が出題された場合に, 学習者が頭の中で再現しやすい図として, 学習カテゴリ内で一貫性のある図を用いる. 図 3 に, 学習カテゴリ「比べる量」の各学習ステップのグラフの例を示す.

解答例は, 問題を解く方法の説明となることに加えて, 頭の中でグラフをイメージしたときに, どのように考えを進めていけばよいか, 頭の中の思考過程を表す形で用意する. また, 前のステップの考え方を理解している前提で, 簡潔な表現となるようにする.

経過時間は, 閲覧中の考え方のページを見てからの時間を表示する. これは, 考え方を読み飛ばさずに理解してもらうために, 次のページに進むための必要閲覧時間 (20 秒) を設けた上で, それを確認できるように用意する.

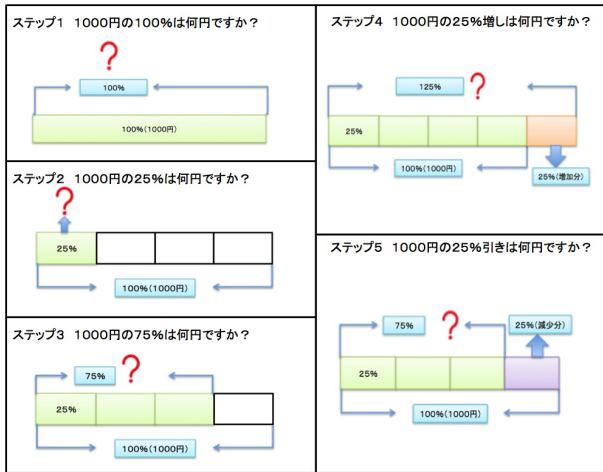


図 3: 学習カテゴリ「比べる量」の各学習ステップのグラフの例

表 3: 学習カテゴリ「比べる量」における学習ステップの学習目標

学習ステップの学習目標 (25%の値を利用する例による説明)
1) 100%は全体を表すことへの理解。 100%と聞くと全体を表す図をイメージできる。
2) 25%は全体の 1/4 を表すことへの理解。 25%と聞くと全体の 1/4 を表す図をイメージできる。
3) 75%は 25%の 3 倍となることへの理解。 75%と聞くと全体の 1/4 が 3 つを表す図をイメージできる。
4) 25%増は全体に 1/4 を加えることへの理解。 25%増と聞くと全体に 1/4 を加えた図をイメージできる。
5) 25%減は全体から 1/4 を減じることへの理解。 25%減と聞くと全体に 1/4 足りない図をイメージできる。

これらの構成要素と、学習カテゴリを細分化した段階的な学習ステップは、頭の中でグラフのイメージを作りながら、徐々に問題を解くための考えを進めることにより、「考え方」を身につけられる設計を意図している。実際に用意している、学習カテゴリ「比べる量」における各学習ステップの学習目標を表 3 に示す。

3.4.2 考え方を定着させる練習問題

理解した「考え方」を定着させることを目的として、考えることを繰り返し練習するための問題を用意する。練習問題は、各学習ステップごとに 10 問 1 セットとして用意し、9 問以上の正解で合格とする。9 問以上の正解で合格とした理由は、学習内容を習得していれば全問正解できるはずの問題となっていることと、勘違いや操作ミスが起こる可能性も考慮して、1 問までの間違いは認めたとによる。

図 4 に練習問題の出力構成を示す。練習問題の出力は、問題、グラフ、5 択の選択肢、その問題の解答開始からの経過時間の 4 つで構成する。

練習問題で使用する数値の組合せとして、「百分率」

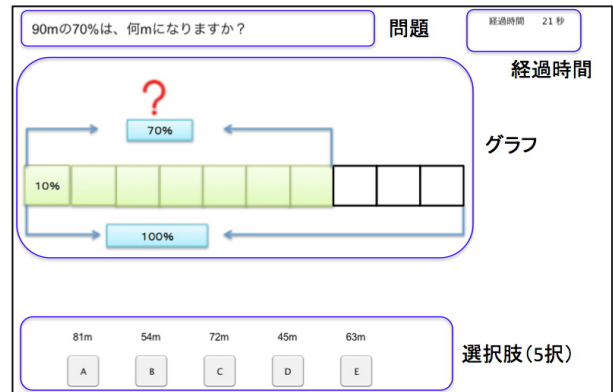


図 4: 「練習問題」のシステム画面の例

表 4: 学習分野「百分率」の学習ステップで用意した練習問題の百分率のパターン(ただし「もとにする量」「百分率」ではステップ 4) を省略した 4 ステップ構成)

ステップと百分率のパターン	パターン数
1) 100%	1
2) 50, 25, 10, 1%	4
3) ステップ 2) の 2 倍から 9 倍 (100%未満)	16
4) 100% + ステップ 2), 3)	20
5) 100% - ステップ 2), 3)	20

と「速さ」の両分野において、「基準量」(「もとにする量」と「道のり」)には 10 から 10 ずつ 90 まで、100 から 100 ずつ 900 まで、1000 から 1000 ずつ 9000 まで、の 27 パターンを用意し「割合」(「百分率」と「時間」)には、表 4 と表 5 に示すパターンだけ用意した。問題は、これらの可能なパターンの組合せの中から、毎回ランダムに出題する。またこれらの数値パターンは、解答時に暗算が容易になる値とする。具体的には、一桁の数のかけ算または割り算により、答えが 6 桁から小数点第 1 位までの値になる問題を取り扱う。

グラフは、「考え方」を理解する際に用いたものと同様のグラフを自動的に描画して表示する。ただし基準量の数値は表示せず、学習者に自分で当てはめてもらうことを意図した。学習者は解答時にもこのグラフを頼りにすることで、グラフを用いることが解答のための必要条件となることを理解させ、グラフの形を繰り返し確認することで独力でイメージしやすくなるように練習を行う。

4 直感的な意味付けによる学習システムの効果の検証実験

本章では、構築した直感的な意味付けによる学習システムを用いる学習者が「百分率」と「速さ」の分野において、「考え方」を理解して、解答を導く能力を身につけられるかを検証した実験について述べる。

表 5: 学習分野「速さ」の学習ステップで用意した練習問題の時間のパターン

ステップと時間のパターン	パターン数
1) 1 時間	1
2) 30, 20, 15, 10, 1 分	5
3) ステップ 1), 2) の 2 倍から 9 倍	19

「比べる量 = 全体(もとにする量) × $\frac{\text{百分率}(\%)}{100}$ 」で求めることができます。

公式

例) 1000円の70%は何円ですか? 例題

今回の問題では、比べる量を求めます。
 全体が1000円で、百分率は70%ですね。

解答例

公式に代入すると、 $1000円 \times \frac{70}{100} = 700円$ になるよ。

図 5: 比較システムの「考え方」ページの例

4.1 実験手順

実験は、ある学習塾の小中学生 16 名を被験者として、提案システムを用いて学習を行う提案群と、比較システムを用いて学習を行う比較群に 8 名ずつに分けて行った。被験者にはまず、提案群と比較群へのグループ分けと、後に学習成果を確認するために、事前テストを行ってもらい、テストの点数が同程度となるようにグループ分けを行った。その後、被験者は指定されたシステムを用いて、1 日 1 時間ずつ合計 4 日間の学習をしてもらった。最後に事後テストを行い、事前テストとの点数の比較、ならびに学習時のログと比較することで、システムの効果を検証する。

比較システムには、提案システムにおける「考え方」のページにおいて、グラフの代わりに教科書通りの公式を示し、解答例として公式を適用した解法を提示した。5 に比較システムの「考え方」ページの例を示す。また「練習問題」においては、グラフや公式は表示されない。これは比較システムにおいては、公式は 1 つの学習カテゴリ内で 1 つしかなく、考え方で繰り返し参照していることをもとに、練習問題を解く際に、公式を頭の中に思い出させることで、公式の利用法の定着を意図したことによる。

事前テストと事後テストは、各学習カテゴリの各学習ステップで扱う「割合」の種類について 1 問ずつの合計 72 問とし、1 問 1 点とした。

4.2 実験結果と考察

4.2.1 事前テストと事後テストに基づく学習効果

表 6 に事前テストと事後テストの正答率 (%) の被験者平均を示す。事後テストの結果から、提案群の被験

表 6: 事前テストと事後テストの正答率 (%) の被験者平均 (括弧内は標準偏差)

	提案群	比較群
事前テスト	47.7(17.8)	48.1(18.2)
事後テスト	66.7(16.4)	52.4(18.2)
増加正答率	18.9(14.3)	4.3(8.1)

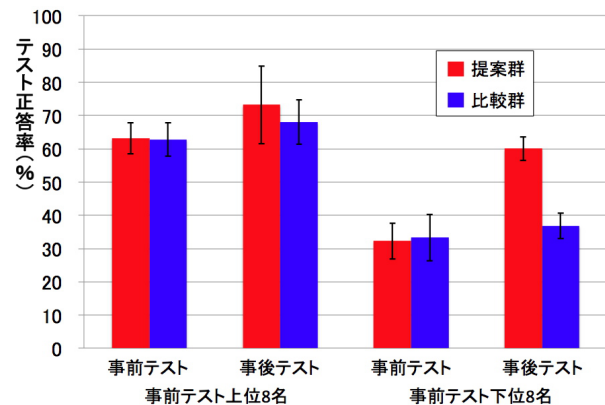


図 6: 事前テストの上位 8 名と下位 8 名の事前テストと事後テストの正答率 (%) の被験者平均と標準誤差

者のみ事前テストの結果に比べて事後テストの点数が有意に増加していた ($t(7)=3.50, p < 0.01$)。また提案群の被験者が、比較群の被験者に比べて点数が有意に高くなった ($t(14)=2.35, p < 0.05$)。このことから、公式を利用した解法により解答を導く学習に比べ、グラフを用いて考え方を理解させる学習の方が効果が高かったことがわかる。

図 6 に、事前テストの上位 8 名と下位 8 名の事前テストと事後テストの正答率 (%) の被験者平均を示す。提案群の被験者のうち、特に事前テストの点数が低かった 4 名の正答率が大きく上昇していた ($t(3)=5.38, p < 0.05$)。このことから、学習分野における「考え方」の理解が進んでいなかった学生に対して、本システムの効果が大きかったことがわかる。

4.2.2 学習の達成度と学習内容の定着

表 7 に、被験者が学習により練習問題に合格したステップの数の被験者平均を示す。事前テスト上位の被験者 8 名について、提案群の被験者は全員が 23 ステップ全てで合格まで達したのに対して、比較群の被験者は、一人平均 3 つのステップを合格できなかった。このことから、「考え方」を十分には理解していなかったが、それなりに問題を解ける学生に対して、提案システムを用いた学習によって、曖昧だった「考え方」を明確にする学習効果があったことがわかる。

事前テスト下位の被験者 8 名について、学習ステップの数には、両群の間に有意差は見られなかった ($t(14)=1.68$,

表 7: 練習問題に合格した学習ステップの数 (全 23 ステップ) の被験者平均 (括弧内は標準偏差)

	提案群	比較群
事前テスト上位	23.0 (0.0)	20.0 (2.2)
事前テスト下位	18.3 (0.4)	17.0 (1.2)
合計	20.6 (2.4)	18.5 (2.3)

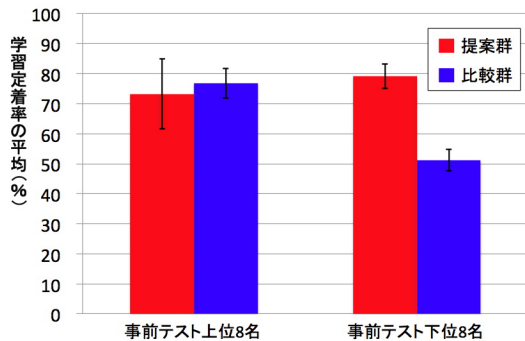


図 7: 学習定着率 (事後テストにおいて練習問題に合格したステップの問題の正答率) の被験者平均と標準誤差

$p > 0.1$) . このことから、用いたシステムによらず、繰り返しによる学習によって、一時的に正しい解答を導ける状態に達したことがわかる .

学習定着率を、事後テストの問題のうち、練習問題に合格したステップの問題の正答率、と定義する . この学習定着率 (%) の被験者平均を図 7 に示す . 事前テスト下位の被験者のうち、比較システムを用いた被験者の学習定着率が低い結果となった ($t(6)=4.80, p < 0.01$) . このことから、学習分野の理解が進んでいない学習者に対しては、グラフを用いた直感的にわかりやすい考え方をを用いることが特に有効であり、提案群の事前テスト下位の被験者においては、学習時に理解した考え方を頭に残しやすくする効果があったと考えられる .

5 まとめ

本稿では、直感的にわかりやすく、記憶を促すグラフを用いた説明により考え方の理解を促し、学んだ考え方を定着させる繰り返しによる練習問題により、「比べる量、基準量、割合」の 3 つ組からなる学習分野の習得を支援する学習システムについて述べた . 実験の結果、考え方を重視した提案システムの方が、公式による解き方を重視した比較システムに比べ、学習の効果、ならびに学習内容の定着が図れることを検証した . また、対象とする学習分野の考え方を十分に理解していない学生に、提案システムの効果が高いことを確認した .

今後は、「比べる量、基準量、割合」の 3 つ組からなる他の学習分野に対して本システムを適用することや、共通の考え方で問題を解くことが可能な複数の分野の学習において、複数の分野に共通する考え方を提示することで、ある分野の学習成果を、他の分野の学習に生かす方法について検討していきたいと考えている .

参考文献

- [1] 教科書の改善と充実に関する研究報告書 (算数), 文部科学省 (2008)
- [2] 清水祐子: 問題解決過程における問い方の発達を促す支援: Scaffolding の考え方を取り入れて, 数学教育論文発表会論文集, Vol.41, pp.117-122 (2008)
- [3] 清水美恵: 数学的問題解決の過程における対話の意義 (II), 数学教育論文発表会論文集, Vol.23, pp.48-54 (1990)
- [4] 松田由香里: 児童の問題解決過程における図の役割に関する研究: 小学校 3 年生に対する授業分析を通して, 数学教育論文発表会論文集, Vol.35, pp.151-156 (2002)
- [5] 菊地光司: 算数の問題解決における図的表現の働きに関する研究, 日本数学教育学会誌, Vol.78, No.12, pp.334-339 (1996)
- [6] 山口耕: 算数学習における絵図的表現の研究: 表現レベルが文章題解決に及ぼす影響について, 数学教育論文発表会論文集, Vol.38, pp.151-156 (2005)
- [7] 水井裕二: 「速さ」の非定型文章題の問題解決に有効な図的表現, 日本教科教育学会誌, Vol.24, No.1, pp.1-10 (2001)
- [8] 新堀栄: 数学的道具としての概念形成を目指した教材構成に関する研究: 割合指導の問題提示場面に用いられる図の視覚的影響, 数学教育論文発表会論文集, Vol.32, pp.317-322 (1999)
- [9] 王戈, 熊谷倫子, 沢井 佳子, 坂元章: 学習支援システムの使用が小学生の学力に及ぼす効果: パネル研究による評価, 日本教育工学会論文誌, Vol.29, Supplement, pp.45-48 (2006)